Problem set 1

Teoría de desición de Bayes
Aprendizaje Automático

1. P1

En un problema de dos clases, unidimensional, las distribuciones involucradas en cada clase son gaussianas: $\mathcal{N}_1(0, \sigma^2)$ y $\mathcal{N}_2(1, \sigma^2)$. Muestre que el valor x_0 que minimiza el riesgo promedio es igual a:

$$x_0 = \frac{1}{2} - \sigma^2 \ln \frac{\lambda_{21} P(\omega_2)}{\lambda_{12} P(\omega_1)}$$

2. P2

Considere dos clases equiprobables en un problema unidimensional con muestras distribuidas de acuerdo con la pdf de Rayleigh en cada clase, esto es:

$$p(x|\omega_i) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma_i^2} \exp(\frac{-x^2}{2\sigma_i^2}) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Calcule la frontera de decisión $g_{ij}(x)$.

3. P3

Escriba un programa en Matlab que calcule el valor de probabilidad de un vector x perteneciente a una distribución $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ multivariada.

Utilizando su programa, calcule el valor de probabilidad de los vectores $x_1 = [0{,}2\ 1{,}3]^t$ y $x_2 = [2{,}2\ \ -1{,}3]^t$, pertenecientes a una distribución normal con $\mu = [0\ 1]^t$ y:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

4. P4

En un problema bidimensional de tres clases, los vectores de características de cada clase son generados por distribuciones normales que comparten la misma matriz de covarianza:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 1{,}8 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Los vectores de medias para cada clase son: $\boldsymbol{\mu_1} = [0{,}1\ 0{,}1]^t$, $\boldsymbol{\mu_2} = [2{,}1\ 1{,}9]^t$ y $\boldsymbol{\mu_3} = [-1{,}5\ 2]^t$.

Asumiendo que las clases son equiprobables, clasifique el vector $x = [1{,}6\ 1{,}5]^t$ de acuerdo con el criterio de clasificación de Bayes (mínima probabilidad de error).

5. P5

En un problema de dos clases, tridimensional, los vectores de características en cada clase están distribuidos normalmente con una matriz de covarianza:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & -0{,}1 \\ 0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Los vectores de medias son: $\boldsymbol{\mu_1} = [0\ 0\ 0]^t$ y $\boldsymbol{\mu_2} = [0{,}5\ 0{,}5\ 0{,}5]^t$. Encuentre las funciones discriminantes y la ecuación de la superficie de decisión.