Procesamiento digital de señales	**UTM**
Señales y sistemas discretos en el tiempo	
Ingeniería en Electrónica	Prof. José Anibal Arias

1. Introducción

Una señal puede ser definida como una función que contiene información. Matemáticamente estas funciones dependen de una o más variables independientes, que pueden ser continuas o discretas. Las *señales continuas en el tiempo* están definidas a lo largo de un continuo de valores y a menudo se les conoce como señales analógicas. Las *señales discretas en el tiempo* están definidas en los intervalos discretos que asume su variable independiente y se les conoce como secuencias de números. Las señales *digitales* son aquellas para las que el tiempo y la amplitud son discretos.

Los sistemas de procesamiento de señal se clasifican de la misma manera que las señales. Esto es, los sistemas continuos en el tiempo son sistemas para los cuales la entrada y la salida son señales continuas en el tiempo, y los sistemas discretos son aquellos para los que la entrada y la salida son secuencias. De manera análoga, en un sistema digital tanto la entrada como la salida son señales digitales.

Las señales discretas en el tiempo pueden obtenerse muestreando una señal continua, o pueden ser generadas directamente por algún proceso discreto. Cualquiera que sea el origen de las señales discretas, los sistemas discretos de procesamiento pueden implementarse con computadoras, sistemas empotrados o con técnicas de VLSI. Los sistemas discretos pueden simular sistemas analógicos o incluso pueden realizar transformaciones que el hardware de los sistemas continuos no puede hacer.

2. Secuencias

Las señales discretas son representadas matemáticamente como secuencias de números. Una secuencia x en la cual el enésimo número en la secuencia se denomina $x[n]$ se escribe como:

$$x = \{x[n]\}, \qquad -\infty < n < \infty$$

donde n es un entero. Cuando las secuencias provienen del muestreo periódico de una señal analógica, el enésimo valor de la secuencia es igual al valor de la señal analógica $x(t)$ en el tiempo nT:

$$x[n] = x(nT), \qquad -\infty < n < \infty$$

La cantidad T es llamada el *periodo de muestreo*, y es el recíproco de la *frecuencia de muestreo*. Estrictamente hablando $x[n]$ se refiere a la enésima muestra de la secuencia, pero a partir de ahora nos servirá para referirnos a la secuencia entera.

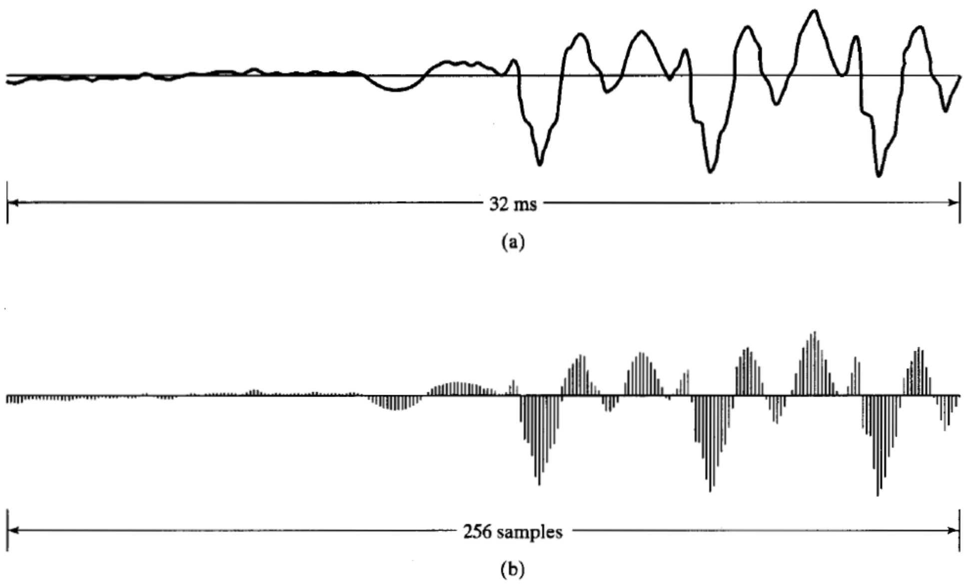


Figura 1: a). Segmento de una señal continua. b). Secuencia de muestras obtenida de a) con $T = 125\mu s$.

2.1. Secuencias básicas y operaciones con secuencias

En el análisis de sistemas de procesamiento digital las secuencias son manipuladas de varias maneras. El producto y la suma de dos secuencias $x[n]$ y $z[n]$ son definidas como el producto y la suma muestra por muestra, respectivamente. La multiplicación de una secuencia por un escalar α es la multiplicación de cada muestra de la secuencia por α. Una secuencia $y[n]$ es una versión retrasada o recorrida de $x[n]$ si:

$$y[n] = x[n - n_0]$$

donde n_0 es un entero.

Algunas secuencias son de particular importancia.

El **impulso unitario** se escribe como $\delta[n]$ y es una secuencia con valores:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

Uno de los aspectos importantes del impulso unitario es que una secuencia arbitraria puede representarse como una suma de impulsos recorridos y escalados. De manera general, cualquier secuencia puede expresarse como:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{1}$$

El **escalón unitario** se escribe como $u[n]$ y tiene los valores:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

El escalón unitario está relacionado con el impulso por:

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

Y el impulso se relaciona con el escalón por medio de:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

Las **secuencias exponenciales y sinusoidales** son extremadamente importantes para representar y analizar los sistemas lineales discretos e invariantes en el tiempo. La expresión general de una secuencia exponencial es:

$$x[n] = A\alpha^n u[n]$$

Si A y α son números reales, la secuencia es real. Si $0 < \alpha < 1$ y A es positiva, entonces la secuencia de valores es positiva y decrece con el incremento de n. Para $-1 < \alpha < 0$ los valores de la secuencia se alternan en signo pero decrecen en magnitud conforme se incrementa n. Si $|\alpha| > 1$ entonces la secuencia crece en magnitud cuando n se incrementa. Es de interés particular la secuencia exponencial donde $\alpha = e^{j\omega_0}$, siendo ω_0 un número real. En este caso, $x[n]$ es una exponencial compleja y $e^{jn\omega_0} = \cos(n\omega_0) + j\sin(n\omega_0)$.

Una secuencia sinusoidal tiene la forma general:

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi) \quad \text{para toda}\, n$$

con A real.

2.2. Secuencias periódicas y aperiódicas

Una señal discreta puede ser clasificada como *periódica* o *aperiódica*. Una señal $x[n]$ es periódica si, para un número entero positivo N:

$$x[n] = x[n+N] \tag{2}$$

Esto es equivalente a decir que la secuencia se repite a sí misma cada N muestras. Si una señal es periódica con el periodo N, también es periódica con el periodo $2N$, $3N$ y cualquier múltiplo entero de N. El *periodo fundamental* es el entero positivo más pequeño para el que la ecuación 2 se satisface. Si la ecuación no se satisface con ningún entero, se dice que $x[n]$ es una señal aperiódica.

Si $x_1[n]$ es una secuencia periódica con periodo N_1 y $x_2[n]$ es otra secuencia periódica con periodo N_2, la suma: $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$ será periódica y su periodo será:

$$N = \frac{N_1 N_2}{mcd(N_1, N_2)}$$

Siendo *mcd* el máximo común divisor. Lo mismo aplica para el producto $x_1[n] \cdot x_2[n]$. Dada una secuencia $x[n]$, una señal periódica puede formarse replicandola como sigue:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-kN]$$

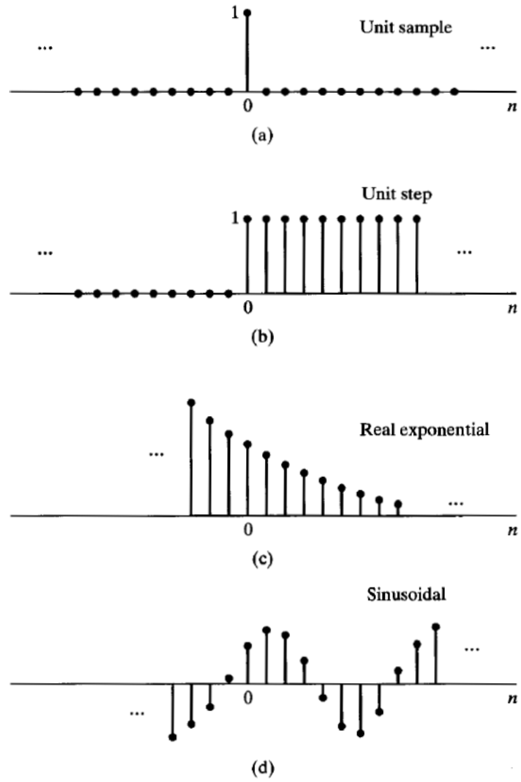


Figura 2: Algunas secuencias básicas.

2.3. Señales pares e impares

Una secuencia se denomina par (o simétrica) si es idéntica a su reflexión alrededor del origen:

$$x[-n] = x[n]$$

De manera similar, una secuencia se dice impar (o antisimétrica) si:

$$x[-n] = -x[n]$$

Una secuencia impar debe ser 0 en $n = 0$. Cualquier secuencia puede ser descompuesta en su componente par e impar:

$$x[n] = x_p[n] + x_i[n], \text{donde:}$$

$$x_p[n] = \frac{1}{2}\left[x[n] + x[-n]\right] \quad \text{y} \quad x_i[n] = \frac{1}{2}\left[x[n] - x[-n]\right]$$

Ejercicio 1 *Grafique las siguientes secuencias:*

- $x[n] = u[n] - u[n-5]$
- $x[n] = u[n+3] - u[n-3]$
- $x[n] = 2u[n] - u[n-2] - 2u[n-4] + u[n-7]$

Tarea 1 *Repase los siguientes temas:*

- *Números complejos (notación, terminología y operaciones básicas).*
- *Logaritmos y decibeles.*
- *Identidad de Euler.*

2.4. Suma de series geométricas

En ocasiones la suma de los valores de algunas series geométricas puede determinarse:

- $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$, siendo $|a| < 1$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2}$, siendo $|a| < 1$.
- $\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{1}{2}N(N-1)$.
- $\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$.

3. Sistemas discretos

Un sistema puede verse como un proceso que produce una transformación de señales. Matemáticamente, un sistema discreto se concibe como una operación que mapea los valores de una secuencia de entrada $x[n]$ en la secuencia de salida $y[n]$.

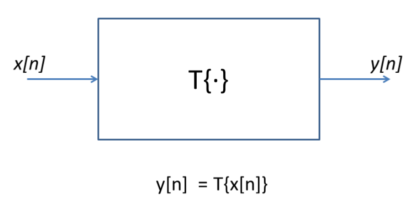


Figura 3: Representación de un sistema discreto.

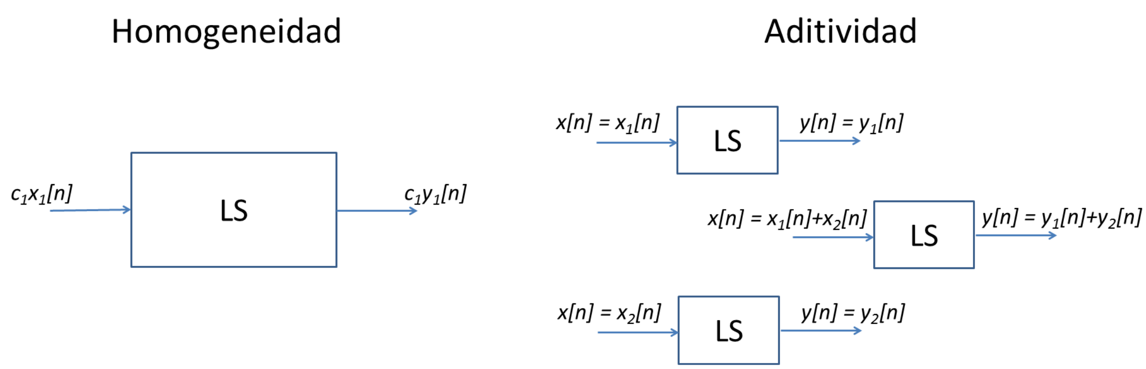
$T\{\cdot\}$ representa por ejemplo un filtro que elimina señales no deseadas o un piloto automático que mantiene una nave en ruta. Para analizar y diseñar sistemas se formulan modelos matemáticos.

4. Propiedades de los sistemas

Los sistemas se clasifican según las propiedades de la transformación $T\{\cdot\}$.

4.1. Linearidad

Los sistemas lineales poseen la propiedad de superposición, que combina dos propiedades y nos lleva a la siguiente definición: un sistema es lineal si y solo si satisface el principio de homogeneidad o escalamiento y el principio de aditividad (ver figura 4).



(a) Principio de homogeneidad

(b) Principio de aditividad

Figura 4: Linearidad

4.2. Invarianza en el tiempo

Suponga que la entrada $x_1[n]$ produce la salida $y_1[n]$. Considere una segunda entrada $x_2[n]$ que es una versión desplazada de $x_1[n]$. Si el sistema es invariante en el tiempo, la salida $y_2[n]$ es una versión recorrida de $y_1[n]$. Esto quiere decir que los parámetros del sistema no cambian con el tiempo.

4.3. Causalidad

Un sistema causal es un sistema no predictivo en el que la salida no anticipa a la entrada. Es físicamente realizable porque depende sólo de valores presentes y/o pasados de la señal de entrada.

4.4. Estabilidad

Normalmente no se diseñan sistemas de ingeniería para que sean inestables, sin embargo, cuando varios sistemas estables se conectan para formar un solo y gran sistema, no existen garantías de que el sistema completo sea estable. Un sistema es estable desde el punto de vista del comportamiento en entrada-salida si y sólo si una entrada acotada al sistema (secuencia cuya magnitud no tiende a $\pm\infty$) produce una salida acotada.

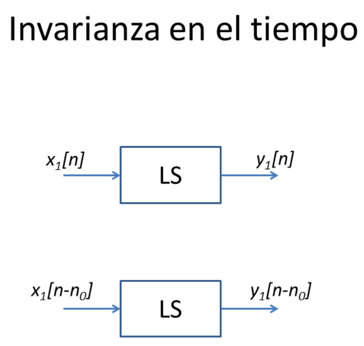


Figura 5: Sistema invariante en el tiempo.

5. Sistemas invariantes en el tiempo

Una clase importante de sistemas son los lineales e invariantes en el tiempo. La propiedad de linearidad de un sistema combinada con la representación de una secuencia como la combinación lineal de impulsos recorridos en el tiempo nos lleva a decir que un sistema lineal puede ser completamente caracterizado por su respuesta al impulso. Sea $h_k[n]$ la respuesta del sistema al impulso $\delta[n-k]$ ocurrido en el tiempo $n=k$. De la ecuación (1):

$$y[n] = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}$$

Según el principio de superposición podemos escribir:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\left\{\delta[n-k]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

La respuesta $T\{\delta[n-k]\}$ es la respuesta del sistema a un impulso k en el tiempo n. Con esta última ecuación podemos decir que la respuesta del sistema a cualquier entrada puede ser expresada en términos de la respuesta del sistema al impulso $\delta[n-k]$. La propiedad de invarianza en el tiempo implica que si $h[n]$ es la respuesta a $\delta[n]$ entonces la respuesta a $\delta[n-k]$ es $h[n-k]$. Entonces:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{3}$$

Decimos que para un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI), conociendo $h[n]$ se puede calcular la salida $y[n]$ para cualquier entrada $x[n]$. La ecuación (3) se conoce como la *suma de convolución*. Si $y[n]$ es una secuencia cuyos valores dependen de $h[n]$ y de $x[n]$, decimos que $y[n]$ es la convolución de $x[n]$ con $h[n]$:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

.

La obtención de la ec. (3) sugiere la interpretación de que la muestra de la entrada en $n = k$, representada por $x[k]\delta[n-k]$ es transformada por el sistema en una secuencia de salida, $x[k]h[n-k]$, $-\infty \leq n \leq \infty$. Se genera entonces una secuencia para cada k, y todas se combinan de manera lineal para generar la secuencia de salida. Esta interpretación se ilustra en la figura 6 y enfatiza la idea de que la suma de convolución es el resultado directo de la linearidad e invarianza en el tiempo del sistema involucrado.

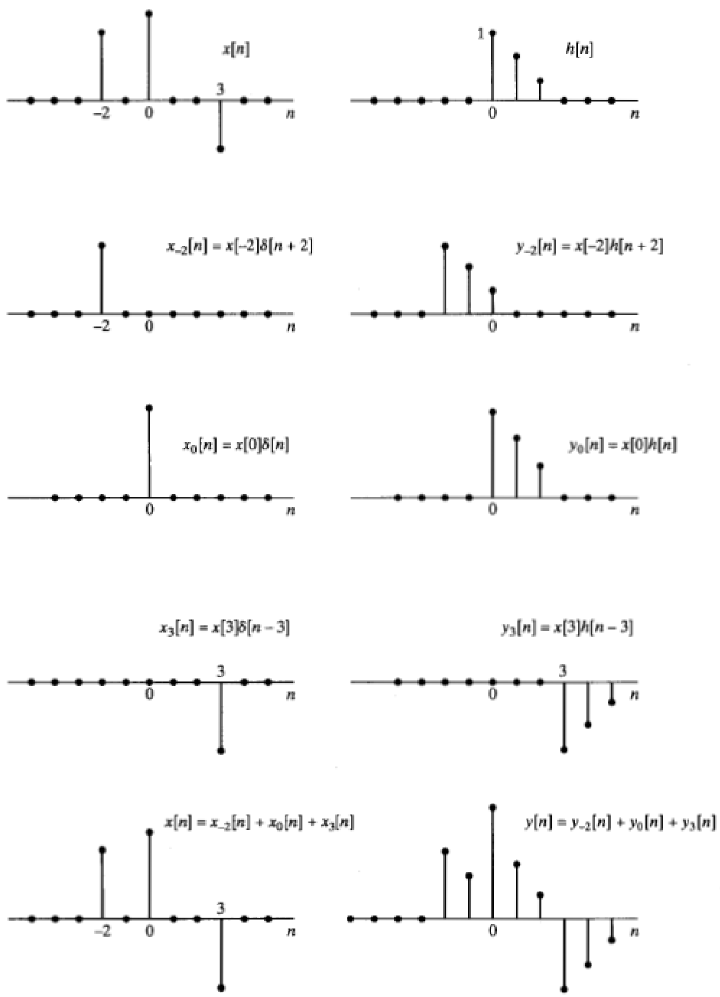


Figura 6: Representación de la salida de un sistema LTI como la superposición de respuestas a muestras individuales de la entrada.

5.1. Propiedades de sistemas LTI

Como los sistemas LTI son descritos por la suma de convolución, las propiedades de estos sistemas son las propiedades de la convolución discreta. Por ejemplo, la operación de convolución es conmutativa:

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

y distributiva:

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

Dos sistemas LTI en cascada corresponden a un sistema LTI que es la convolución de las respuestas al impulso de los dos sistemas:

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$

Ejercicio 2 *Realice las siguientes operaciones de convolución:*

- $\delta[n-1] * \delta[n+1]$
- $\delta[n-1] * \delta[n]$
- $u[n] * \delta[n-1]$

5.2. Ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes

Una clase importante de sistemas LTI consiste en aquellos sistemas en los que la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ satisfacen una ecuación en diferencias lineales con coeficientes constantes de enésimo orden de la forma:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

donde a_k y b_k son parámetros constantes que definen al sistema y son independientes de $x[n]$ y $y[n]$:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Las propiedades de los sistemas mencionadas en la sección 4 pueden ser utilizadas para encontrar una representación de los sistemas en términos de ecuaciones en diferencias.