Procesamiento digital de señales	**UTM**

Representación de señales en el dominio de la frecuencia

Ingeniería en Electrónica — Prof. José Anibal Arias

1. Introducción

Hemos visto que para sistemas LTI la representación de una secuencia de entrada como una suma ponderada de impulsos desplazados nos conduce a una representación de la salida como una suma ponderada de respuestas desplazadas. Así como las señales continuas, las señales discretas pueden representarse de varias maneras. Por ejemplo, las secuencias de exponenciales complejas juegan un papel importante en la representación de señales discretas; esto es porque las secuencias exponenciales complejas son funciones propias de los sistemas LTI, esto es, la respuesta de un sistema LTI a una entrada sinusoidal es también sinusoidal, con la misma frecuencia de la entrada y con una amplitud y una fase determinada por la transformación del sistema. Esta propiedad de los sistemas LTI hace que la representación de las señales en términos de sinusoides o exponenciales complejas sea muy útil.

Por ejemplo, considere una señal de entrada $x[n] = e^{j\omega n}$ para $-\infty < n < \infty$ (una exponencial compleja de frecuencia ω). Según la ecuación de convolución, la salida correspondiente de un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ es:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega(n-k)} \\ &= e^{j\omega n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) \end{aligned}$$

Si definimos:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

entonces,

$$y[n] = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$$

Vemos que $e^{j\omega k}$ es una función propia del sistema, con un valor propio $H(e^{j\omega})$. Este último describe un cambio en la amplitud de la salida en función de la frecuencia ω y se denomina *respuesta en frecuencia* del sistema. En general $H(e^{j\omega})$ es compleja y puede ser expresada en términos de su parte real e imaginaria, o en términos de su magnitud y su fase.

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + H_I(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\angle H(e^{j\omega})}$$

Más adelante veremos que una gran cantidad de señales pueden ser representadas como una combinación lineal de exponenciales complejas de la forma:

$$x[n] = \sum_k \alpha_k e^{j\omega_k n}$$

y por el principio de superposición, la salida correspondiente de un sistema LTI es:

$$y[n] = \sum_k \alpha_k H(e^{j\omega_k}) e^{j\omega_k n} \tag{1}$$

Por lo tanto, si podemos encontrar una representación de $x[n]$ como una superposición de exponenciales complejas entonces podemos encontrar la salida del sistema usando la ecuación (1). Recuerde que la respuesta en frecuencia de un sistema LTI discreto es siempre una función periódica de la variable de frecuencia ω con periodo 2π.

Ejemplo 1 *Una clase importante de sistemas LTI incluye a aquellos sistemas que tienen una respuesta en frecuencia unitaria sobre un cierto rango de frecuencias y cero en el resto. Esto corresponde a filtros ideales selectivos de frecuencias.*

2. Representación de secuencias con transformadas de Fourier

La transformada discreta de Fourier (DFT) es uno de los dos procedimientos más potentes y utilizados en el procesamiento digital de señales (el otro es el filtrado digital). La DFT nos permite analizar, manipular y sintetizar señales en maneras que no es posible hacerlo con el procesamiento de señales analógicas.

La DFT es un procedimiento matemático usado para determinar el contenido frecuencial de una secuencia. Su origen es la transformada continua de Fourier $X(e^{j\omega})$, definida como:

$$X(e^{j\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

donde $x(t)$ es una señal continua. Esta ecuación transforma una función $x(t)$ continua en el dominio del tiempo en una función $X(f)$ continua en el dominio de la frecuencia. La evaluación de la expresión $X(f)$ nos permite determinar el contenido armónico de cualquier señal de interés. Se puede afirmar que la transformada de Fourier es el mecanismo matemático disponible más dominante y utilizado para el análisis de sistemas físicos.

La DFT se define como una secuencia $X[k]$ discreta en el dominio de la frecuencia:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}$$

siendo $x[n]$ una secuencia, probablemente obtenida del muestreo de la variable continua $x(t)$.

2.1. Entendiendo la DFT

Podemos ver la ecuación de la DFT desde un nuevo ángulo. Usando la fórmula de Euler:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left[\cos(2\pi kn/N) - j \sin(2\pi kn/N)\right]$$

con:
X[k], el k-ésimo componente de X.
k, el índice de la salida de la DFT en el dominio de la frecuencia. Éste va de 0, 1, 2, 3 ... hasta N-1.
x[n], la secuencia de muestras de la entrada.
n, el índice de la secuencia de entrada en el dominio del tiempo. Éste va de 0, 1, 2, 3 ... hasta N-1.
N, número de muestras de la secuencia de entrada y número de puntos de frecuencia en la DFT.

Los índices de las muestras de entrada y la salida de la DFT van desde 0 hasta $N-1$, esto significa que con N muestras en el dominio del tiempo la DFT determina el contenido espectral de la entrada, es decir, con N se controla la resolución de los resultados en el dominio de la frecuencia. Por ejemplo, para $N=4$, n y k varían de 0 a 3, y la DFT es:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n]\left[\cos(2\pi kn/4) - j\sin(2\pi kn/4)\right]$$

Si escribimos la DFT para el primer término de salida (correspondiente a $k=0$) tenemos:

$$\begin{aligned} X[0] =& x[0]\cos(2\pi\cdot 0\cdot 0/4) - jx[0]\sin(2\pi\cdot 0\cdot 0/4) \\ &+ x[1]\cos(2\pi\cdot 1\cdot 0/4) - jx[1]\sin(2\pi\cdot 1\cdot 0/4) \\ &+ x[2]\cos(2\pi\cdot 2\cdot 0/4) - jx[2]\sin(2\pi\cdot 2\cdot 0/4) \\ &+ x[3]\cos(2\pi\cdot 3\cdot 0/4) - jx[3]\sin(2\pi\cdot 3\cdot 0/4) \end{aligned} \tag{2}$$

El segundo término de la DFT, correspondiente a $k=1$, es:

$$\begin{aligned} X[1] =& x[0]\cos(2\pi\cdot 0\cdot 1/4) - jx[0]\sin(2\pi\cdot 0\cdot 1/4) \\ &+ x[1]\cos(2\pi\cdot 1\cdot 1/4) - jx[1]\sin(2\pi\cdot 1\cdot 1/4) \\ &+ x[2]\cos(2\pi\cdot 2\cdot 1/4) - jx[2]\sin(2\pi\cdot 2\cdot 1/4) \\ &+ x[3]\cos(2\pi\cdot 3\cdot 1/4) - jx[3]\sin(2\pi\cdot 3\cdot 1/4) \end{aligned}$$

Y así continuamos para $k=2$ y $k=3$. Vemos que cada término $X[k]$ de la DFT es el *producto escalar* entre la secuencia de entrada y las diferentes componentes de frecuencia. Las frecuencias exactas de las sinusoides dependen de la frecuencia de muestreo y del número de muestras N. Por ejemplo, si muestreamos una señal continua a una razón de 500 muestras/segundo, y calculamos una DFT con 16 puntos, la frecuencia fundamental de las sinusoides es $f_s/N = 500/16 = 31{,}25$Hz. Las otras frecuencias de análisis son múltiplos de la frecuencia fundamental:

$$\begin{aligned} X[0] =& 0\cdot 31{,}25 = 0Hz \\ X[1] =& 1\cdot 31{,}25 = 31{,}25Hz \\ X[2] =& 2\cdot 31{,}25 = 62{,}5Hz \\ X[3] =& 3\cdot 31{,}25 = 93{,}75Hz \\ &\cdots \\ X[15] =& 15\cdot 31{,}25 = 468{,}75Hz \end{aligned} \tag{3}$$

Entonces, las N diferentes frecuencias de análisis de la DFT son $f_k = \frac{kf_s}{N}$. El término $X[0]$ de la DFT nos indica la magnitud de una componente de 0 Hz contenida en la señal de entrada, el término $X[1]$ especifica la magnitud de una componente de 31.25 Hz, $X[2]$ indica la magnitud de una componente de 62.5 Hz en la señal de entrada, etc. Las componentes de salida de la DFT también nos indican las relaciones de fase en las frecuencias de análisis contenidas en la señal de entrada. También nos interesa la magnitud de cada término $X[k]$.

Si representamos un valor de salida $X[k]$ de la DFT con su parte real e imaginaria:

$$\begin{aligned} X[k] =& X_{real}[k] + jX_{imag}[k] = |X[k]|\angle\phi_k \\ |X[k]| =& \sqrt{X_{real}[k]^2 + jX_{imag}[k]^2} \\ \phi_k =& \tan^{-1}\left(\frac{X_{imag}[k]}{X_{real}[k]}\right) \end{aligned}$$

Cuando $k = 0$, hacemos el producto de $x[n]$ con respecto a $\cos(0) - j\sin(0)$. Tenemos:

$$X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\left[\cos(0) - j\sin(0)\right]$$

Como $\cos(0) = 1$ y $\sin(0) = 0$:

$$X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

Vemos que $X[0]$ es la suma de las muestras $x[n]$. Cuando $X[0]$ no es cero es porque $x[n]$ tiene un valor promedio diferente de cero.

Ejercicio 1 *Realice un script en MATLAB que calcule la DFT de 8 puntos de una señal que contiene componentes de 1 y 2 kHz:*

$$x[n] = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot n) + 0{,}5\sin(2\pi \cdot 2000 \cdot n + 3\pi/4)$$

Vemos que la componente de 2 kHz está desplazada $135°$ *con respecto a la de 1 kHz. Las muestras han sido tomadas a una razón de* $f_s = 8$ *kHz y son:*

$$x[n] = [0{,}3535\ 0{,}3535\ 0{,}6464\ 1{,}0607\ 0{,}3535\ -1{,}0607\ -1{,}3535\ -0{,}3535]$$

- *Grafique* $x[n]$ *con respecto a las componentes* $\cos(2\pi kn/8)$ *y* $\sin(2\pi kn/8)$ *(8 gráficas en total).*
- *Determine la DFT de* $x[n]$.
- *Grafique (usando la función* `stem` *de MATLAB) la magnitud y la fase de* $X[k]$.

2.2. Propiedades de la DFT

2.2.1. Simetría

Si observamos la gráfica de la magnitud de la DFT del ejercicio 1 vemos que existe una simetría. En realidad la DFT está diseñada para aceptar secuencias de entrada complejas, aunque la mayoría de secuencias con las que se utiliza son reales, con su parte imaginaria asumida como cero. Cuando $x[n]$ es real, las salidas de la DFT con $k = 1$ hasta $k = (N/2) - 1$ son redundantes con frecuencias de $k > (N/2)$. La k-ésima salida de la DFT tendrá la misma magnitud que la $(N-k)-sima$ salida. El ángulo de fase de la k-ésima salida es el negativo de la fase de la $(N-k)-sima$ salida.

Decimos entonces que cuando la entrada a la DFT es una secuencia real, $X[k]$ es el complejo conjugado de $X[N-k]$. Si observa la gráfica de la magnitud de la DFT del ejercicio 1 observará que $X[6]$ y $X[7]$ son complejos conjugados de $X[2]$ y $X[1]$ respectivamente.

Ejercicio 2 *Modifique el ejercicio 1 y añada una muestra a la secuencia $x[n]$. Calcule la DFT de 9 puntos de la secuencia. ¿Cómo es ahora la magnitud y la fase de la DFT?. ¿Porqué?*

Defina una nueva secuencia $x[n]$ compleja de 16 puntos con un solo componente sinusoidal. Calcule la DFT. Describa el resultado obtenido analizando la magnitud y la fase de la DFT.

2.2.2. Linealidad

Como ya hemos visto, esta propiedad significa que la DFT de la suma de dos secuencias es igual a la suma de las transformadas de cada secuencia.

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} [x_1[n] + x_2[n]]\, e^{-j2\pi kn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] e^{-j2\pi kn/N} + \sum_{n=0}^{N-1} x_2[n] e^{-j2\pi kn/N} = X_1[k] + X_2[k] \end{aligned} \tag{4}$$

2.2.3. Desplazamiento

Esta propiedad de la DFT establece que un desplazamiento en el tiempo de la secuencia $x[n]$ se manifiesta como un desplazamiento en fase de los ángulos asociados a la DFT. Por ejemplo, si decidimos desplazar la secuencia de entrada $x[n - n_d]$, su DFT será:

$$X_d[k] = e^{j2\pi n_d k/N} X[k]$$

y si el desplazamiento es en frecuencia:

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X[e^{j(\omega - \omega_0)}]$$

Ejercicio 3 *Desplazamos la secuencia $x[n]$ del ejercicio 1 tres unidades a la izquierda. Los valores de la secuencia son ahora:*

$$x[n] = [1{,}0607\ 0{,}3535\ \ -1{,}0607\ \ -1{,}3535\ \ -0{,}3535\ 0{,}3535\ 0{,}3535\ 0{,}6464]$$

Calcule la DFT y grafique sus valores de magnitud y fase. Compárelos con los del ejercicio 1 y ofrezca una explicación de las diferencias observadas.

2.2.4. Teorema de convolución

Si:

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X[e^{j\omega}]$$

y,

$$h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H[e^{j\omega}]$$

Siendo la suma de convolución:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Entonces:

$$Y[e^{j\omega}] = X[e^{j\omega}] \cdot H[e^{j\omega}]$$

Esto significa que podemos realizar la convolución de secuencias multiplicando las transformadas de Fourier correspondientes.

2.3. Transformada inversa

Decimos que la DFT transforma las señales del dominio del tiempo a una representación en el dominio de la frecuencia. Se puede revertir el proceso para obtener la señal original en el dominio del tiempo realizando una transformada inversa (IDFT) en los valores de $X[k]$. La expresión que usamos es:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N}$$

o de manera equivalente:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\left[\cos(2\pi kn/N) + j\sin(2\pi kn/N)\right]$$