**Procesamiento digital de señales** **UTM**

Muestreo de señales continuas

Ingeniería en Electrónica Prof. José Anibal Arias

# 1. Introducción

El origen de muchas de las señales discretas se encuentra en señales continuas que son muestreadas. Bajo ciertas restricciones, las señales continuas pueden quedar bien representadas después del muestreo. Después de un procesamiento digital, las señales de salida pueden nuevamente reconstruirse como señales analógicas.

# 2. Aliasing

Existe, en el dominio de la frecuencia, una ambigüedad asociada con las muestras de una señal discreta. Considere la señal continua $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$. Si muestreamos esta señal a una razón de $f_s$ muestras por segundo, obtendremos la señal discreta $x[n] = \sin(2\pi f_0 n t_s)$. Como la señal seno es periódica en múltiplos de $2\pi$, la señal muestreada es:

$$x[n] = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi f_0 n t_s + k 2\pi) = \sin(2\pi (f_0 + m f_s) n t_s)$$

siendo $k = mn$, un múltiplo entero de $n$. Entonces, **cuando se muestrea una señal senoidal a una frecuencia de $f_s$, para $m$ entera, no podemos distinguir entre los valores muestreados de la señal con frecuencia $f_0$ y otra señal con frecuencia $f_0 + m f_s$ Hz**.

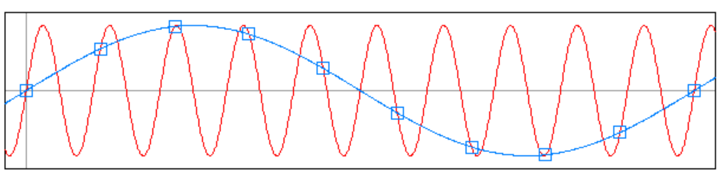

Figura 1: Aliasing.

Por ejemplo, una señal senoidal con $f_0 = 7$ kHz muestreada a 6 kHz, si tomamos $m = -1$, decimos que $f_0 + m f_s = 7 + (-1 \cdot 6) = 1$ kHz.

# 3. Muestreo periódico

Una manera de obtener una representación discreta de una señal continua es a través de un muestreo periódico, donde se obtiene una secuencia de muestras $x[n]$ a partir de una señal continua $x(t)$ de acuerdo a la relación:

$$x[n] = x(nT), \quad -\infty < n < \infty$$

En la ecuación anterior $T$ es el *periodo de muestreo*, y su recíproco, $f_s = 1/T$, es la *frecuencia de muestreo*, en muestras por segundo. El sistema que implementa esta operación es un convertidor analógico digital (ADC). Este ADC tiene características especiales de cuantización, linealidad, circuitos de mantenimiento de las muestras y limitaciones en la frecuencia de muestreo.

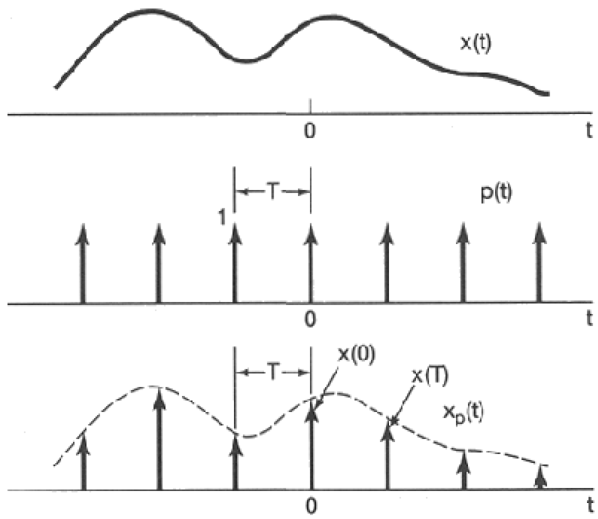


Figura 2: Muestreo con impulsos periódicos.

### 3.1. Representación del muestreo en el dominio de la frecuencia

Para derivar la relación entre la entrada y la salida del convertidor ADC ideal en el dominio de la frecuencia consideramos que la señal modulante $s(t)$ es un tren de impulsos:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Donde $\delta(t)$ es la función impulso unitario. En consecuencia,

$$x_s(t) = x(t) \cdot s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

En el dominio de la frecuencia, la transformada de Fourier de un tren de impulsos es $S(e^{jw}) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$, siendo $\omega_0$ la frecuencia de los impulsos de muestreo y $T$ su periodo. Entonces, un tren de impulsos infinito en el dominio del tiempo espaciado $T$ segundos tiene una representación en el dominio de la frecuencia como un tren de impulsos separados por $\omega_0 = 2\pi/T$. Note que entre más cerca se encuentren los impulsos en el dominio del tiempo más separados se encuentran los impulsos en el dominio de la frecuencia.

La multiplicación de $x(t)$ y $s(t)$ en el dominio del tiempo equivale a una convolución de sus transformadas en el dominio de la frecuencia. Entonces:

$$
\begin{aligned}
X_s(e^{jw}) =& \frac{1}{2\pi}\left\{X(e^{jw}) * \left[\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_0)\right]\right\} \\
=& \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{jw}) * \delta(\omega - k\omega_0) \\
=& \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_0)
\end{aligned} \tag{1}
$$

Decimos por lo tanto que, en el dominio de la frecuencia, la transformada de Fourier de la señal muestreada consiste en réplicas periódicas y escaladas de $X(e^{jw})$ espaciadas por $\omega_0$ rad/sec.

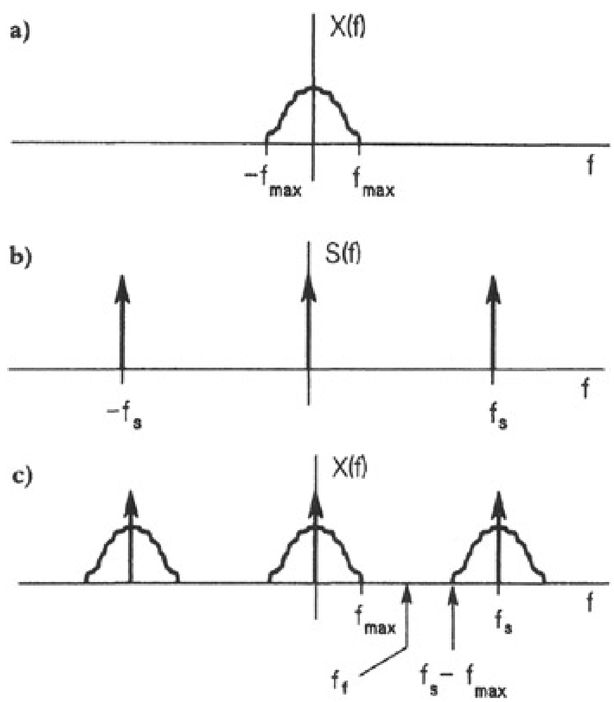


Figura 3: Muestreo en el dominio de la frecuencia.

Suponga que $x_s(t)$ está limitada en su ancho de banda, de manera que $X_s(e^{jw}) = 0$ para $|\Omega| > \Omega_0$. Si $x_s(t)$ es muestreada con una frecuencia $\Omega_s \geq 2\Omega_0$, entonces, las réplicas de la transformada de $x_s(t)$ estarán separadas, mientras que si $\Omega_s < 2\Omega_0$, los espectros $X_s$ se traslaparán. Esto es el *aliasing*.

## 3.2. Teorema del muestreo

Si $x_s(t)$ está limitada en su ancho de banda, podrá ser recuperada a partir de sus muestras si la frecuencia a la que se muestrea es al menos en doble que su ancho de banda.