Procesamiento digital de señales	**UTM**
Transformada Z	
Ingeniería en Electrónica	Prof. José Anibal Arias

1. Introducción

Hemos visto que la transformada de Fourier juega un rol clave en la representación y el análisis de señales y sistemas discretos. Ahora vamos a utilizar una generalización de la transformada de Fourier que se conoce como *transformada z*. La transformada z es para señales discretas lo que la transformada de Laplace es a las señales continuas, y ambas tienen una relación similar a su correspondiente transformada de Fourier. Una motivación para esta generalización es que la transformada de Fourier no converge para todas las secuencias, y seria útil una generalización de ella que abarque una mayor cantidad de señales. Otra ventaja es que la notación de la transformada z es más sencilla que la de Fourier.

2. Transformada Z

La transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ de una secuencia $x[n]$ se define como:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

La transformada-z $X(z)$ de una secuencia $x[n]$ se define como:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

z es una variable compleja, $z = re^{j\omega}$. Cuando $r = 1$, $X(z) = X(e^{j\omega})$. Algunas veces se considera que la transformada z es un operador que transforma una secuencia en una función. Con esta interpretación, la secuencia $x[n]$ se convierte en la función $X(z)$, donde z es una variable compleja continua. La transformada z que hemos definido se conoce como *bilateral*. La transformada z *unilateral* se define como:

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Estas transformadas son equivalentes si $x[n] = 0$ para $n < 0$. La transformada unilateral es particularmente útil para resolver ecuaciones de diferencias con condiciones auxiliares diferentes de cero.

Como la transformada Z es función de una variable compleja, es conveniente describirla e interpretarla usando el plano Z complejo. En este plano, el contorno correspondiente a $|z| = 1$ es un círculo de radio 1, y se conoce como *círculo unitario*.

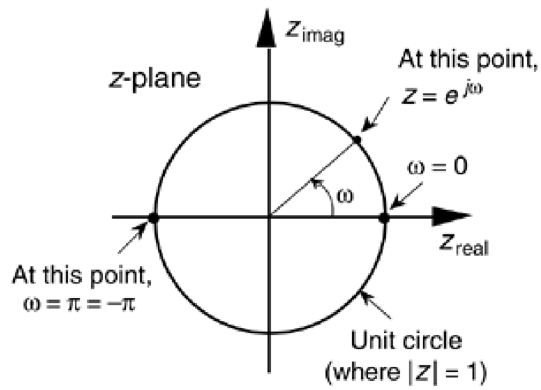

Figura 1: Círculo unitario en el plano complejo z.

Note que ω es el ángulo entre el vector asociado a un punto z en el círculo unitario y el eje real del plano complejo z. Si evaluamos $X(z)$ en puntos del círculo unitario comenzando en $z = 1(\omega = 0)$ hasta $z = -1(\omega = \pi)$, obtenemos la transformada de Fourier de $0 \leq \omega \leq \pi$. Si continuamos evaluando $X(z)$ alrededor del círculo unitario eso correspondería a obtener la transformada de Fourier de $\omega = \pi$ hasta $\omega = 2\pi$. Con esta interpretación, la periodicidad en frecuencia de la transformada de Fourier es capturada naturalmente.

3. Región de convergencia

Así como la serie de Fourier no converge para todas las secuencias (la suma infinita no siempre es finita), la transformada Z no converge para todas las secuencias ni para todos los valores de z. Dada una secuencia, el conjunto de valores de z para los cuales la transformada Z converge se denomina *región de convergencia*, o ROC. Se requiere de una secuencia absolutamente sumable:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] r^{-n} \right| < \infty$$

para la convergencia de la transformada Z. Dada la ecuación anterior, debido a la multiplicación de la secuencia por el exponencial real r^{-n} es posible que la transformada Z converga aunque no lo haga la transformada de Fourier. La convergencia de la transformada Z depende de $|z|$, ya que como $|X(z)| < \infty$ si:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||z|^{-n} < \infty$$

la ROC de la transformada Z consiste de todos los valores de z para lo que la desigualdad anterior se cumple. Entonces, si un valor z, digamos z_1, se encuentra en la ROC, entonces todos los valores de z en el círculo definido por $|z| = |z_1|$ estarán también en la ROC. Como consecuencia de esto, la ROC consistirá de un anillo en el plano z centrado alrededor del origen. Su límite superior será un círculo (o se extenderá al infinito), y su límite inferior sera un círculo (o se extenderá hasta el origen). Si la ROC incluye el círculo unitario, la transformada de Fourier de la secuencia converge.

Las series de potencias de la transformada Z son series de Laurent, por lo que muchos teoremas de variable compleja se utilizan en el estudio de la transformada Z. Una serie de Laurent representa una función analítica en cada punto del interior de la región de convergencia, por lo que la transformada z y todas sus derivadas con respecto a ω deben ser funciones continuas de ω.

La transformada z es muy útil cuando se expresa en forma cerrada, pero también lo es cuando se expresa como una función racional:

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios de z. Los valores de z para los cuales $P(z) = 0$ se denominan *ceros* de $X(z)$, y los valores de z para los cuales $Q(z) = 0$ se denominan *polos* de $X(z)$.

TABLE 3.1 SOME COMMON z-TRANSFORM PAIRS

Sequence	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	All z except 0 (if $m > 0$) or ∞ (if $m < 0$)
5. $a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
6. $-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
7. $na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
8. $-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
9. $[\cos\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1-[\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
10. $[\sin\omega_0 n]u[n]$	$\frac{[\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
11. $[r^n\cos\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1-[r\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
12. $[r^n\sin\omega_0 n]u[n]$	$\frac{[r\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 0$

Figura 2: Pares de transformadas z comunes.

3.1. Propiedades de la región de convergencia

1. La ROC es un disco o un anillo centrado en el origen del plano Z.
2. La transformada de Fourier de $x[n]$ converge si y sólo si la ROC de la transformada z de $x[n]$ incluye al círculo unitario.
3. La ROC no puede contener polos.

4. Si $x[n]$ es de duración finita, la ROC se extiende en todo el plano Z hasta el infinito, excepto posiblemente $z = 0$ o $z = \infty$.

5. Si $x[n]$ es una secuencia del lado derecho, la ROC se extiende desde el polo más externo hasta el infinito.

6. Si $x[n]$ es una secuencia del lado izquierdo, la ROC se extiende desde el polo más interior hacia el origen.