Procesamiento digital de señales **UTM**

Transformada Z inversa

Ingeniería en Electrónica Prof. José Anibal Arias

.

La transformada Z inversa está dada por:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$

Aunque la integral de contorno nos proporciona la fórmula de inversión deseada, no la usaremos directamente en nuestros cálculos de la transformada Z inversa. En nuestras aplicaciones tratamos con señales y sistemas que tienen transformadas Z racionales. Para estas desarrollaremos un método de inversión más simple.

Considere la transformada Z de $x[n]$ en forma racional.

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$$

Esta función es propia si $a_N \neq 0$ y $M < N$. Si $M \geq N$ la función es impropia y se puede descomponer en un polinomio y una función racional propia. Partiendo de una función racional propia y eliminando las potencias negativas de z multiplicando el numerador y el denominador por z^N obtenemos:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \ldots + b_M z^{N-M}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_N} \\ \frac{X(z)}{z} &= \frac{b_0 z^{N-1} + b_1 z^{N-2} + \ldots + b_M z^{N-M-1}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_N} \end{aligned}$$

donde $\frac{X(z)}{z}$ es siempre propia.

1. Expansión en fracciones parciales con polos reales diferentes

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{Q(z)}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_N)} = \frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2} + \ldots + \frac{A_N}{z-p_N}$$

Para el polo $z = p_j$, tenemos:

$$\begin{aligned} A_j &= \left.\frac{Q(z)\cdot \cancel{(z-p_j)}}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots\cancel{(z-p_j)}\ldots(z-p_N)}\right|_{z=p_j, j=1,2,\ldots N} \\ &= \frac{Q(p_j)}{(p_j-p_1)(p_j-p_2)\ldots(p_j-p_N)} \end{aligned}$$

$\frac{X(z)}{z}$ puede ser expandida en fracciones parciales como:

$$\frac{X(z)}{z} = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{z - p_k}$$

Si la ROC está a la derecha del polo de $X(z)$ con la parte real más grande, entonces la secuencia es causal y tenemos:

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k \left(p_k\right)^n u[n]$$

Si la ROC está a la izquierda del polo de $X(z)$ con la parte real más pequeña, entonces la secuencia es anticausal y está dada por:

$$x[n] = -\sum_{k=1}^{N} A_k \left(p_k\right)^n u[-n-1]$$

Para una señal bilateral, la transformada inversa es una combinación de las señales causales y anticausales mencionadas. Note que para $N = M$ en $X(z)$, un impulso $A_0\delta[n]$ aparece en la respuesta en el tiempo.

2. Polos múltiples

Para usar este procedimiento debemos seguir un orden. Por ejemplo, dado:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{N(z)}{z^3(z+1)} = \frac{A_1}{z^3} + \frac{A_2}{z^2} + \frac{A_3}{z} + \frac{A_4}{z+1}$$

A_1, A_2 y A_3 deben ser determinados en orden. Es decir, debemos encontrar primero el numerador asociado con la potencia más alta. Las constantes asociadas con las raíces diferentes pueden ser obtenidas en cualquier momento.